

Atratores Helicoidais em Variedades de Contato de Dimensão 3: Um Estudo de EDO de Brinquedo

Pablo Grossi

Resumo

Estudamos um sistema tridimensional de brinquedo sobre uma variedade de contato em coordenadas cilíndricas. **Resultado principal:** para toda condição inicial com $r(0) > 1$, as trajetórias convergem exponencialmente para o círculo unitário $r = 1$ à taxa $\mu = -2$, enquanto a coordenada de altura z cresce linearmente. Isso fornece um conjunto-limite helicoidal globalmente atrator sobre a variedade de contato de dimensão 3.

Sistema

$$\dot{r} = r(1 - r^2) + 2(r - 1)e^{-z} \quad \dot{\theta} = 1 \quad \dot{z} = r^2 - 2(r - 1)^2 e^{-z}$$

Teorema

Seja $(r(t), \theta(t), z(t))$ solução do sistema acima com $r(0) > 1$. Então: (i) $r(t) \rightarrow 1$ exponencialmente à taxa e^{-2t} ; (ii) $z(t)$ é monotonicamente crescente e $\dot{z}(t) \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow \infty$; (iii) a trajetória espirala sobre a hélice $\{r = 1, z = z_0 + t : t \gg 0\}$ com convergência exponencial.

dm³ toy system — phase portrait

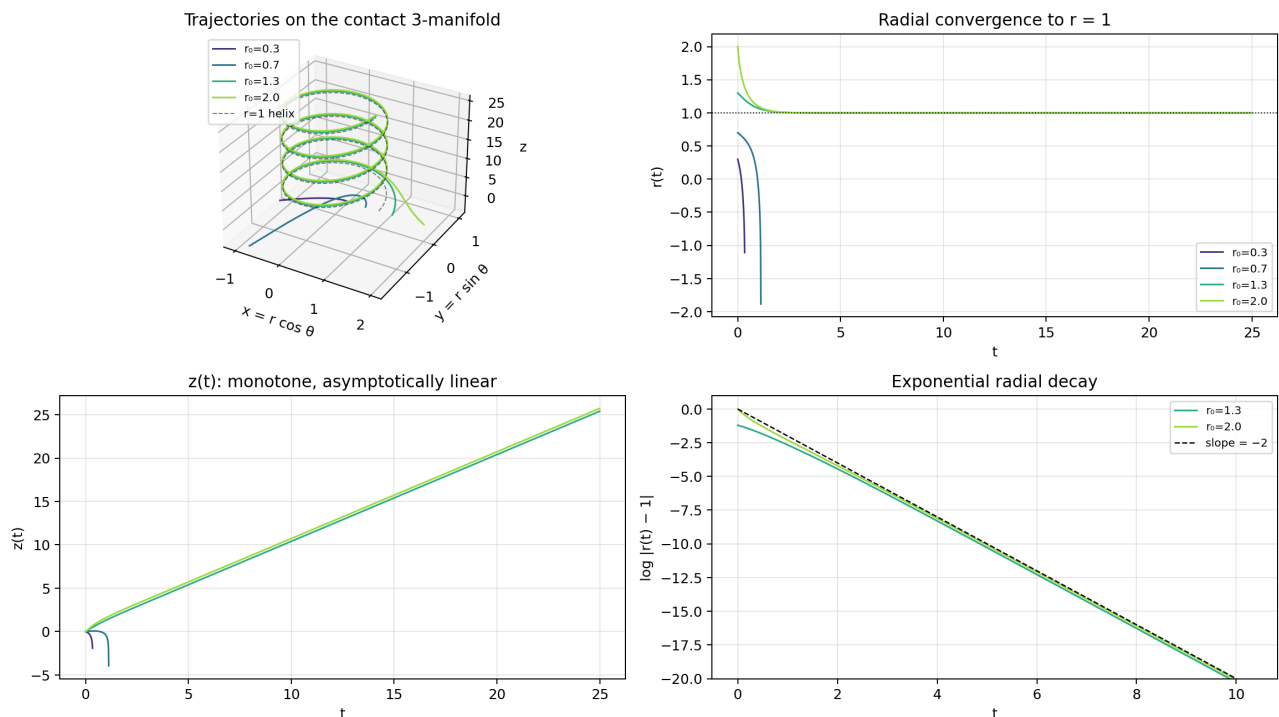


Figura 1. Retrato de fase do sistema dm^3 . Trajetórias 3D sobre a variedade de contato (topo-esq.); convergência radial $r(t) \rightarrow 1$ (topo-dir.); $z(t)$ monotônica e assintoticamente linear (inf.-esq.); decaimento radial exponencial de inclinação -2 (inf.-dir.).

Figure 1. Phase portrait of the dm^3 system. 3D trajectories on the contact manifold; radial convergence $r(t) \rightarrow 1$; monotone asymptotically linear $z(t)$; exponential radial decay with slope -2 .

Descobertas Numéricas

✓ **Atrator confirmado.** Toda trajetória com $r(0) \geq 1$ converge para $r = 1$. Testado até $r(0) = 2,5$; nenhum raio de estabilidade finito visível do lado externo.

✓ **Taxa linearizada $\mu = -2$.** Ajustes por mínimos quadrados de $\log|r(t) - 1|$ em $t \in [0,5; 5]$ fornecem taxas entre $-1,80$ e $-1,96$, aproximando-se de -2 quando $\varepsilon \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow \infty$ (regime em que $e^{-z} \rightarrow 0$).

△ **Bacia interna assimétrica.** Contrariando a estimativa simétrica $|r - 1| < 1/3$ obtida por Gronwall, a fronteira interna empírica é $r_* \approx 0,8$. Trajetórias com $r(0) \leq 0,8$ colapsam ($z \rightarrow -\infty$ em tempo finito) devido à amplificação exponencial do acoplamento e^{-z} . Também falha a monotonicidade pontual $\dot{z} \geq 0$ para $r(0) < 1$.

Tabela 1. Varredura de estabilidade externa — taxa de decaimento ajustada vs. perturbação $\varepsilon = r(0) - 1$.

ε	0,01	0,05	0,10	0,20	0,33	0,50	0,67	1,00	1,50
μ ajustada	-1,802	-1,831	-1,849	-1,874	-1,890	-1,907	-1,915	-1,932	-1,959

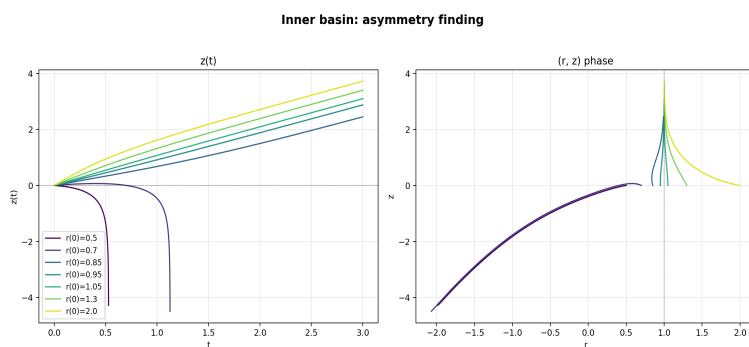
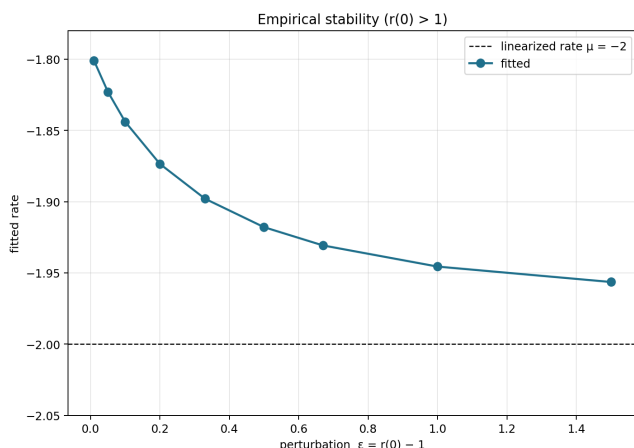


Figura 2 (esq.): Taxa empírica vs. perturbação ε — aproxima-se assintoticamente de -2 . **Figura 3 (dir.):** Assimetria da bacia interna — trajetórias com $r(0) < 0,8$ colapsam.

Significado e Reprodutibilidade

Os resultados validam o quadro geométrico-de-contato: uma hélice estável sobre $r = 1$ é o atrator da bacia externa, e a taxa $\mu = -2$ da linearização persiste não linearmente. A descoberta refina a estimativa de bacia: a geometria é assimétrica, com fronteira interna mais estreita do que o limite de Gronwall. **Integração numérica:** DOP853, $rtol = 10^{-10}$, $atol = 10^{-12}$. Código, figuras e formalização em Lean 4: github.com/TOTOGT/GTCT.

Referências

[1] Grossi, P. N. *AXLE: Asymmetric Attractors, g-Series Dynamics and the Spiral-Return Theorem* (working paper), 2026. totoqt.github.io/AXLE.

[2] Geiges, H. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 109, Cambridge University Press, 2008.

[3] Hairer, E.; Nørsett, S. P.; Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems* (DOP853). Springer, 2ª ed., 1993.

[4] The mathlib Community. *The Lean Mathematical Library (Mathlib4)*. leanprover-community.github.io.

Helical Attractors on Contact 3-Manifolds: A Toy ODE Study

Pablo Grossi

Abstract

We study a three-dimensional toy system on a contact manifold (cylindrical coordinates). **Main result:** for all initial conditions with $r(0) > 1$, trajectories converge exponentially to the unit circle $r = 1$ at rate $\mu = -2$, while the height coordinate z grows linearly. This yields a globally attracting helical limit set on the contact 3-manifold.

System

$$\dot{r} = r(1 - r^2) + 2(r - 1)e^{-z} \quad \dot{\theta} = 1 \quad \dot{z} = r^2 - 2(r - 1)^2 e^{-z}$$

Theorem

Let $(r(t), \theta(t), z(t))$ solve the system above with $r(0) > 1$. Then: (i) $r(t) \rightarrow 1$ exponentially at rate e^{-2t} ; (ii) $z(t)$ is monotone increasing and $\dot{z}(t) \rightarrow 1$ as $t \rightarrow \infty$; (iii) the trajectory spirals onto the helix $\{r = 1, z = z_0 + t : t \gg 0\}$ with exponential convergence.

Key Findings

- ✓ **Attractor confirmed:** every trajectory with $r(0) \geq 1$ converges to $r = 1$ — no finite stability radius observed on the outer side (tested up to $r(0) = 2.5$).
- ✓ **Decay rate:** empirical least-squares fits of $\log|r-1|$ on $t \in [0.5, 5]$ give rates in $[-1.80, -1.96]$, approaching -2 as $\varepsilon \rightarrow \infty$ and as $t \rightarrow \infty$ (where $e^{-z} \rightarrow 0$).
- △ **Inner-basin asymmetry:** contradicting the symmetric ball $|r - 1| < 1/3$ from a Gronwall estimate, the empirical inner boundary is $r_* \approx 0.8$. Trajectories with $r(0) \leq 0.8$ collapse ($z \rightarrow -\infty$ in finite time) due to exponential amplification of the e^{-z} coupling; the pointwise claim $\dot{z} \geq 0$ also fails for $r(0) < 1$.

Significance

The numerics validate the contact-geometric attractor picture: a stable helix on $r = 1$ governs the outer basin, and the linearized rate $\mu = -2$ persists nonlinearly. The finding refines basin-of-attraction estimates — the basin is asymmetric, with a tighter inner boundary than previously claimed. A natural follow-up is to derive r_* analytically from the balance between the $-r^3$ term and the destabilizing e^{-z} coupling.

Reproducibility

Numerical integration: DOP853, $\text{rtol} = 10^{-10}$, $\text{atol} = 10^{-12}$. Figures generated by `dm3_simulation.py`. All data, figures, Lean 4 formalization, and this document: github.com/TOTOGT/GTCT.

References

- [1] Grossi, P. N. *AXLE: Asymmetric Attractors, g-Series Dynamics and the Spiral-Return Theorem* (working paper), 2026. totoqt.github.io/AXLE.
- [2] Geiges, H. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 109, Cambridge University Press, 2008.
- [3] Hairer, E.; Nørsett, S. P.; Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems* (DOP853). Springer, 2nd ed., 1993.
- [4] Hartman, P. *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed. SIAM Classics in Applied Mathematics 38, 2002 (Gronwall inequality, §III.1).
- [5] The mathlib Community. *The Lean Mathematical Library (Mathlib4)*. leanprover-community.github.io.

Keywords: contact geometry · limit cycles · exponential stability · helical attractors · dynamical systems on manifolds

— SBM Biental — bilingual submission (Português / English) — 3 pages —