

GEOMETRIA DE CONTATO E A DOBRA GALÁCTICA

Síntese da Série Principia Orthogona e a Cáustica de Lentes Gravitacionais

Contact Geometry and the Galactic Fold: Synthesis of the Principia Orthogona Series and the Gravitational Lensing Caustic

Pablo Grossi¹

¹ G6 LLC, Newark, NJ, EUA. ORCID: 0009-0000-6496-2186. E-mail: pgrossi888@outlook.com

Pré-publicação — Série Principia Orthogona · Agosto 2026

RESUMO

A série Principia Orthogona (2026) desenvolve um formalismo de Mecânica de Contato Generativa (MCG) fundamentado no operador dm^3 e na variedade de contato ($\mathbb{R}^3$, $\alpha = dz - r^2 d\theta$). Este artigo sintetiza os resultados centrais dos cinco volumes da série e do Artigo de Trabalho 58 (WP58), com foco na derivação analítica do raio de dobra galáctica r^* a partir da equação diferencial dm^3 . Demonstra-se que $r^*(\varepsilon)$ é o cruzamento em $z = 0$ da variedade estável do ponto de sela $r_1 = 2\cos(3\pi/7) \approx 0,445$, e que o parâmetro de acoplamento $\varepsilon = v/\kappa$ — sendo v a frequência epicíclica vertical e κ a frequência epicíclica radial — vale 2 na ressonância orbital 2:1, resultando em $r^*(\varepsilon = 2) \approx 0,776$ em unidades do raio do disco R_{disc} . A contribuição nova deste artigo é a proposta de identificação de r^* com o raio da cáustica Whitney A_1 do mapeamento de lentes gravitacionais da galáxia. Fontes de fundo próximas à cáustica exibem magnificação divergente $\mu \propto |\beta - \beta_c|^{-1/2}$, tornando r^* uma grandeza observacionalmente acessível por meio de imagens de lentes fortes de galáxias espirais. A previsão concreta é $\theta_{arco} \approx r^* \cdot R_{disc} / D_L$, onde D_L é a distância angular ao objeto lente.

Palavras-chave: geometria de contato; mecânica orbital galáctica; lentes gravitacionais; singularidade Whitney; operador dm^3 .

ABSTRACT

The Principia Orthogona series (2026) develops a Generative Contact Mechanics (GCM) formalism based on the dm^3 operator and the contact manifold ($\mathbb{R}^3$, $\alpha = dz - r^2 d\theta$). This article synthesizes the central results of the five volumes and Working Paper 58 (WP58), focusing on the analytical derivation of the galactic fold radius r^* from the dm^3 differential equation. It is shown that $r^*(\varepsilon)$ is the $z = 0$ crossing of the stable manifold of the saddle $r_1 = 2\cos(3\pi/7) \approx 0.445$, and that the coupling parameter $\varepsilon = v/\kappa$ — where v is the vertical epicyclic frequency and κ the radial epicyclic frequency — equals 2 at the orbital 2:1 resonance, yielding $r^*(\varepsilon = 2) \approx 0.776$ in units of R_{disc} . The new contribution is the proposal to identify r^* with the radius of the Whitney A_1 caustic of the galaxy's gravitational lensing map. Background sources near the caustic exhibit divergent magnification $\mu \propto |\beta - \beta_c|^{-1/2}$, making r^* observationally accessible through strong-lensing images of spiral galaxies. The concrete prediction is $\theta_{arc} \approx r^* \cdot R_{disc} / D_L$.

Keywords: contact geometry; galactic orbital mechanics; gravitational lensing; Whitney singularity; dm^3 operator.

1 INTRODUÇÃO

A mecânica orbital de galáxias espirais apresenta uma bifurcação fundamental: estrelas no disco interior seguem órbitas quase circulares estáveis que convergem, sob perturbação, ao círculo de velocidade rotacional constante v_c ; estrelas além de um raio crítico escapam ou se dispersam para a auréola galáctica. Identificar esse raio de

transição — denominado aqui raio de dobra galáctica r^* — a partir de primeiros princípios dinâmicos constitui o Problema Aberto O.4 da série Principia Orthogona (GROSSI, 2026a).

A série Principia Orthogona (G1–G5) propõe uma estrutura unificada baseada em Mecânica de Contato Generativa (MCG). O formalismo parte da variedade de contato padrão em coordenadas cilíndricas $(\mathbb{R}^3, \alpha)$, governada pelo operador dm^3 — um sistema de equações diferenciais autônomas que descreve transições entre atratores. O Volume I (G1) estabelece o aparato matemático; os Volumes II a V especializam o formalismo para realização de contato, domínios biológicos (D1–D4), teoria dimensional e completude estrutural (GROSSI, 2026a–2026e).

O Artigo de Trabalho 58 (WP58) resolve O.4 sob condições explicitadas: aproximação superamortecida ($\Gamma \gg \Omega_c$) e resposta linear à troca de ação ressonante. O resultado central é que r^* não é invariante da forma de contato α , mas sim invariante dinâmico do campo vetorial — a fronteira da bacia de atração do disco, cujo locus é o cruzamento $z = 0$ da variedade estável do ponto de sela $r_1 = 2\cos(3\pi/7)$ (GROSSI, 2026b).

A contribuição nova deste artigo é a proposta de que r^* coincide com o raio da cóustica Whitney A_1 do mapeamento de lentes gravitacionais da galáxia. Cóusticas Whitney A_1 são os locais de magnificação divergente em lentes gravitacionais (SCHNEIDER; EHLERS; FALCO, 1992). A identificação $r^* \leftrightarrow$ cóustica conecta a dinâmica orbital ao observável da magnificação, tornando r^* uma previsão testável por lentes fortes.

O artigo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta o operador dm^3 e a variedade de contato. A Seção 3 deriva r^* e o parâmetro $\varepsilon = v/\kappa$. A Seção 4 propõe a identificação de r^* com a cóustica gravitacional e formula a previsão observacional. A Seção 5 discute perspectivas observacionais e limitações. A Seção 6 conclui.

2 O OPERADOR DM^3 E A VARIEDADE DE CONTATO

2.1 A variedade de contato

Considera-se a variedade de contato padrão $(\mathbb{R}^3, \alpha)$ com forma de contato

$$\alpha = dz - r^2 d\theta$$

em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . A distribuição de contato $\xi = \ker(\alpha)$ é o campo de hiperplanos em que α se anula. Uma curva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é Legendriana se $\dot{\gamma} \in \xi$ ao longo de todo o seu traçado, isto é, se satisfaz a equação de contato $dz = r^2 d\theta$ em todo ponto (GEIGES, 2008).

A interpretação física da equação de contato é direta: dz é a variação do relógio de contato, e $r^2 d\theta$ é a taxa de acúmulo de momento angular areal por ângulo percorrido. A condição Legendriana é portanto a conservação do momento angular em cada passo.

2.2 A equação diferencial dm^3

O operador dm^3 é definido pelo sistema de EDOs autônomas sobre $(\mathbb{R}^3, \alpha)$:

$$\dot{r} = r(1 - r^2) + \varepsilon(r - 1) \exp(-z)$$

$$\dot{z} = r^2 - \varepsilon(r - 1)^2 \exp(-z)$$

onde $\varepsilon > 0$ é o parâmetro de acoplamento entre o modo radial r e o modo de contato z . O primeiro termo de $\dot{r} = r(1 - r^2)$ — é a restauração ao atrator $r = 1$ (disco circular); o segundo termo codifica a troca de ação com um reservatório vertical de intensidade proporcional a $\exp(-z)$. A equação $\dot{z}$ garante a forma de contato como integral de movimento no limite $\varepsilon \rightarrow 0$ (Lema de Conservação G1, GROSSI, 2026a).

2.3 Pontos fixos e constantes heptagonais

Os pontos de equilíbrio do sistema satisfazem $\dot{r} = \dot{z} = 0$. Eliminando $\exp(-z)$ entre as duas equações, obtém-se o polinômio:

$$r^3 - r^2 - 2r + 1 = 0$$

cujas raízes reais positivas são:

$$r_1 = 2\cos(3\pi/7) \approx 0,4450 \quad (\text{ponto de sela interno})$$

$$r_2 = 2\cos(\pi/7) \approx 1,8019 \quad (\text{ponto de sela externo})$$

Estas constantes heptagonais são independentes de ε : o parâmetro de acoplamento não desloca as raízes r do polinômio. A posição z do ponto de sela, contudo, é ε -dependente:

$$z_{\text{sela}}(\varepsilon) = \ln[\varepsilon / (r_1(1 + r_1))] = \ln(\varepsilon / 0,6430)$$

A dependência de r^* em ε entra portanto apenas por esta coordenada z do ponto de sela, e não pela coordenada radial r_1 (Teorema G3, GROSSI, 2026b).

3 A DOBRA GALÁCTICA R^* E O PARÂMETRO $\epsilon = N/K$

3.1 Coordenadas normalizadas da ODE galáctica

Adota-se a coordenada radial normalizada $r = R/R_{\text{disc}}$, onde R_{disc} é o raio do disco estelar. O termo de restauração $\dot{r} = r(1 - r^2)$ segue do potencial da curva plana de rotação: para $v_c = \text{const}$, a força radial normalizada é $-(1 - r^2)/r^2$, e na aproximação superamortecida ($\Gamma \gg \Omega_c$) resulta $\dot{r} = r(1 - r^2)$ (Aproximação A2, GROSSI, 2026b).

O termo de acoplamento $\epsilon(r - 1)\exp(-z)$ modela a troca de momento de ação entre os modos radial e vertical por meio de um reservatório de taxa única $\exp(-z)$. Esta é a Aproximação A6, linearidade da resposta em torno de $(r, z) = (1, 0)$.

3.2 Derivação de $\epsilon = v/\kappa$

Na ressonância orbital 2:1 (dois ciclos radiais por ciclo vertical), a transferência de ação entre os modos satisfaz $\dot{J}_r / \dot{J}_z = -v/\kappa$, onde $\kappa = \sqrt{2} v_c / R_{\text{disc}}$ é a frequência epicíclica radial (curva plana), e $v = \sqrt{(4\pi G \rho_0)}$ é a frequência epicíclica vertical. A conservação de energia na troca confirma: $\epsilon = v/\kappa$ (Seção 11.4, GROSSI, 2026b).

Verificação independente: a linearização da ODE em $r = 1, z = 0$ dá $\partial \dot{r} / \partial r|_{r=1} = \epsilon - 2$. Estabilidade marginal requer $\epsilon = 2$, que coincide com $\epsilon = v/\kappa$ na ressonância 2:1 ($v = 2\kappa$).

3.3 O raio de dobra $r^*(\epsilon)$

Define-se $r^*(\epsilon)$ como o cruzamento $z = 0$ da variedade estável do ponto de sela $(r_1, z_{\text{sela}}(\epsilon))$. O Teorema G3 (GROSSI, 2026b) garante que $r^*(\epsilon)$ depende de ϵ exclusivamente por meio de $z_{\text{sela}}(\epsilon) = \ln(\epsilon/0,6430)$. Para $\epsilon = 2$ (ressonância 2:1 galáctica):

$$r^*(\epsilon = 2) \approx 0,776 R_{\text{disc}}$$

4 R^* COMO CÁUSTICA WHITNEY A_1 DO MAPEAMENTO DE LENTES GRAVITACIONAIS

4.1 Cáusticas em lentes gravitacionais

Em lentes gravitacionais, o mapeamento de lente $\eta \rightarrow \beta(\eta)$ tem Jacobiano $\det(\partial\beta/\partial\eta) = 0$ nas curvas críticas. Suas imagens no plano da fonte são as cáusticas (SCHNEIDER;

EHLERS; FALCO, 1992). Na vizinhança de uma cáustica do tipo dobra — singularidade Whitney A_1 — a magnificação de uma fonte a distância δ da cáustica diverge como:

$$\mu \propto |\delta|^{-1/2}$$

Observacionalmente, isto manifesta-se como arcos brilhantes de Einstein. A localização angular do arco satisfaz $\theta_{\text{arco}} = D_{\text{LS}} \cdot \beta_c / D_S$.

4.2 A proposta de identificação $r^* \leftrightarrow$ cáustica

A proposta deste artigo é: o raio de dobra galáctica r^* , derivado da ODE dm^3 como fronteira da bacia de atração do disco, coincide com o raio da cáustica Whitney A_1 do mapeamento de lentes gravitacionais da mesma galáxia.

[MODELO] Esta identificação é uma proposição, não uma derivação de primeiros princípios na teoria da relatividade geral. Requer verificação observacional com sistemas de lentes fortes de galáxias espirais bem caracterizadas. A previsão concreta é:

$$\theta_{\text{arco}} \approx r^* \cdot R_{\text{disc}} / D_L$$

4.3 Magnificação observável

A geometria espiral da galáxia — codificada na forma de contato $\alpha = dz - r^2 d\theta$ — cria uma estrutura adicional de difração gravitacional. O efeito de magnificação de ordem $10\times$ observado em sistemas de lentes fortes de galáxias espirais (KOOPMANS; TREU, 2003) é consistente com o comportamento $\mu \propto |\delta|^{-1/2}$ próximo a uma cáustica Whitney A_1 em $\delta \approx 0,01 R_{\text{disc}}$.

[ABERTO] Determinar se a magnificação observada em sistemas específicos de lentes é quantitativamente compatível com $r^*(\varepsilon = 2) \approx 0,776$ requer modelagem de lente com perfil de massa galáctico realístico. Isto constitui o Problema Aberto O.4.3 da série.

5 PERSPECTIVAS OBSERVACIONAIS

(a) Levantamento SLACS: a extensão a galáxias espirais permitiria medir θ_{arco} e compará-lo com $r^* \cdot R_{\text{disc}} / D_L$ para uma amostra de galáxias com curva de rotação plana bem determinada.

(b) Missão Euclid (ESA, 2023–): prevê detectar até 10^5 sistemas de lentes fortes. A classificação morfológica do objeto lente e a medição de R_{disc} via fotometria permitem o teste direto de $\theta_{\text{arco}} \approx r^* \cdot R_{\text{disc}} / D_L$.

A principal limitação é a Aproximação A6 (resposta linear em $(r, z) = (1, 0)$). Para galáxias com perfil de massa não-newtoniano, $\varepsilon = v/\kappa$ pode diferir de 2, deslocando r^* de 0,776. O mapeamento $\varepsilon \rightarrow r^*(\varepsilon)$ (GROSSI, 2026b, Figura 1) permite a generalização para qualquer galáxia com ε medido.

6 CONCLUSÕES

Este artigo sintetizou o formalismo de Mecânica de Contato Generativa da série Principia Orthogona e apresentou a derivação do raio de dobra galáctica $r^*(\varepsilon = 2) \approx 0,776 R_{\text{disc}}$. Os resultados verificados são:

- (i) r^* é um invariante dinâmico, não de contato (Lema 9.1, WP58).
- (ii) Os pontos de sela $r_1 = 2\cos(3\pi/7)$ e $r_2 = 2\cos(\pi/7)$ são raízes ε -independentes do polinômio heptagonal $r^3 - r^2 - 2r + 1 = 0$.
- (iii) $\varepsilon = v/\kappa = 2$ na ressonância orbital 2:1, derivado de dois caminhos independentes (Seção 3.2).

A contribuição nova — proposta, não derivada de primeiros princípios — é a identificação de r^* com o raio da cáustica Whitney A_1 do mapeamento de lentes gravitacionais da galáxia, com previsão observacional $\theta_{\text{arco}} \approx r^* \cdot R_{\text{disc}} / D_L$ [MODELO]. A verificação observacional constitui o Problema Aberto O.4.3.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece aos colaboradores Zila e Felipe pelo apoio ao desenvolvimento da série Principia Orthogona.

REFERÊNCIAS

- BARTELMANN, M.; SCHNEIDER, P. Weak gravitational lensing. *Physics Reports*, v. 340, n. 4-5, p. 291–472, 2001.
- BINNEY, J.; TREMAINE, S. *Galactic Dynamics*. 2. ed. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- GEIGES, H. *An Introduction to the Geometry of Contact Manifolds*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

GROSSI, P. Principia Orthogona, Volume I: GOMC Science — Mathematics of Generative Transitions. [S.l.]: G6 LLC, 2026a. ISBN 979-8-9954416-0-1 (impresso). DOI: 10.5281/zenodo.21146416.

GROSSI, P. WP58: r^* _galactic from the Contact G-Chain. Principia Orthogona Vol VII. [S.l.]: G6 LLC, 2026b. Disponível em: <https://totogt.github.io/geometry/book7/wp58-galactic-fold.html>.

GROSSI, P. WP57: Causal Integration and Milkomeda. Principia Orthogona Vol VII. [S.l.]: G6 LLC, 2026c.

GROSSI, P. Principia Orthogona, Volume III: The Mini-Beast. [S.l.]: G6 LLC, 2026d. ISBN 979-8-9954416-6-3 (eBook). [Documento vivo].

GROSSI, P. Principia Orthogona, Volume V: Complete Completeness — The Seed. [S.l.]: G6 LLC, 2026e. ISBN 979-8-9954416-0-1 (impresso).

KOOPMANS, L. V. E.; TREU, T. The structure and dynamics of luminous and dark matter in the early-type lens galaxy of 0047-281. The Astrophysical Journal, v. 583, n. 2, p. 606–615, 2003.

SCHNEIDER, P.; EHLERS, J.; FALCO, E. E. Gravitational Lenses. Berlin: Springer, 1992.

ZENODO. Principia Orthogona — Generative Contact Mechanics [Comunidade]. Disponível em: <https://zenodo.org/communities/principia-orthogona>. Acesso em: ago. 2026.