Variétés de carquois orthogonaux affines en δ et 2δ, et leurs entrelacs de contact

Pablo Nogueira Grossi

G6 LLC (d/b/a PrincipiaOrthogona), Newark, NJ, États-Unis g6llc@proton.me ORCID 0009-0000-6496-2186

Version 0.2 — 5 octobre 2026, révisée le 11 novembre 2026 — préparée pour l'évaluation de V. Pinot

Résumé

Pinot a récemment calculé les variétés de carquois $\mathfrak{M}_\delta$ et $\mathfrak{M}_{2\delta}$ des carquois orthogonaux dont le graphe sous-jacent est un diagramme de Dynkin affine, et identifié parmi elles des singularités kleiniennes de surface [Pin26]. Nous faisons trois observations et une construction. (i) En supposant que l'immersion fermée de Li [Li19, prop. 9.2.1] s'applique au cadre non encadré et signé de Pinot (nous ne l'avons pas vérifié), dès que $\mathfrak{M}_\delta$ est une surface, l'involution agit trivialement et $\mathfrak{M}_\delta$ est la surface kleinienne classique du diagramme affine sous-jacent. (ii) Par conséquent, les deux lignes $\widetilde{D}$ du théorème 1.2 de [Pin26] sont de type D_{2n-2} et D_{2n-1}, et non D_{n+1} ; pour $(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$, la relation de définition est $z^2 = z(-x)^{n-1} - xy^2$. Nous confirmons ces deux énoncés par un calcul numérique indépendant de l'anneau des invariants. (iii) Dans chaque ligne en 2δ, le groupe Γ contient le groupe classique du graphe sous-jacent avec indice 2 (ou 1) ; nous conjecturons que cette structure de quotient provient naturellement des données du carquois, et démontrons l'énoncé correspondant pour les anneaux de coordonnées. Enfin, chaque surface est un cône dont l'entrelacs est une variété de contact de dimension 3, S^3/Γ ; nous montrons que l'espace des représentations symétriques est quaternionique, de sorte que l'entrelacs est le quotient 3-sasakien (de Kempf–Ness) de la sphère unité, et nous dressons la table des fibrations de Seifert du flot de Reeb (de Hopf).

Mode de lecture. Chaque énoncé porte une étiquette : [démontré ici], [cité], [vérifié numériquement] (un script du dossier ; indice, non démonstration), [arithmétique vérifiée par le noyau Lean] (Lean 4, arithmétique seulement) ou [ouvert]. **Dossier de vérification** (Python et Lean, avec un README) : cliquer ici pour ouvrir le zip joint (joint à ce PDF), ou à télécharger sur https://totogt.github.io/geometry/collab/pinot-orthogonal-quivers/. Ce texte a été préparé avec l'aide de Claude (Anthropic) ; l'auteur en assume la responsabilité, et il n'a pas encore été vérifié par V. Pinot.

1 Introduction

Les variétés de carquois de Nakajima de type Dynkin affine redonnent les espaces ALE de Kronheimer et les singularités kleiniennes $\mathbb{C}^2/\Gamma$ [Kro89, Nak94] ; les étiquettes ADE remontent à la classification par Gabriel des carquois de type fini [Gab72]. Pinot étudie les quotients analogues pour les *carquois orthogonaux* [Pin26] : des carquois Q munis d'une involution contravariante τ et d'un signe s, dont les représentations symétriques $\mathrm{SRep}(\overline{Q}, \mathrm{d})$ portent une action de $G_{\mathrm{d}}^b = \prod O(\mathrm{d}_i) \times \prod GL(\mathrm{d}_j)$, et

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{d}} = \mu^{-1}(0)/\!/G_{\mathrm{d}}^b.$$

Son théorème 1.2 donne $\mathfrak{M}_\delta$ et $\mathfrak{M}_{2\delta}$ pour dix familles infinies. Cette note relit ce tableau sous deux angles : la comparaison avec la variété de carquois classique du même graphe (§§3–4), et la géométrie de contact de l'entrelacs de chaque surface (§5).

Résultats.

- **Théorème A** (§3). Si $\mathfrak{M}_\delta$ est une surface, alors $\mathfrak{M}_\delta \cong \mathfrak{M}_\delta^{\mathrm{cl}}$, la surface kleinienne classique du graphe affine sous-jacent, et l'involution y agit trivialement. Énoncé conditionnel à la seule applicabilité de l'immersion fermée de Li au cadre non encadré de Pinot.
- **Corollaire B** (§3). Les lignes $\widetilde{D}$ sont de type D_{2n-2} et D_{2n-1}. L'équation de $(\widetilde{D}_{2n-2}, v)$ dans [Pin26] est correcte ; la relation de $(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$ est $z^2 = z(-x)^{n-1} - xy^2$. Confirmé numériquement pour $n = 3, 4, 5$ par le calcul direct de l'anneau des invariants.
- **Conjecture C** (§4). Chaque surface en 2δ est $\mathfrak{M}_\delta^{\mathrm{cl}}/\iota$ pour une involution ι construite naturellement à partir des données du carquois (l'énoncé abstrait du quotient découle dès que les identifications des anneaux d'invariants sont établies) ; de façon équivalente, $\Gamma_{2\delta} \supset \Gamma_{\mathrm{cl}}$ avec indice ≤ 2, et l'entrelacs classique est un revêtement double de l'entrelacs en 2δ (lignes d'indice 2 ; la ligne $(-,-)$ est d'indice 1). L'énoncé au niveau des anneaux est démontré.
- **Théorème D** (§5). $\mathrm{SRep}(\overline{Q}, \mathrm{d})$ est un sous-espace quaternionique ; l'entrelacs est le quotient de Kempf–Ness / 3-sasakien de la sphère unité ; le flot de Reeb est le flot de Hopf, avec les données de Seifert du tableau 2.

2 Cadre

Nous suivons les notations de [Pin26], avec l'espace signé standard ($J_i = \mathrm{id}$ dans des bases convenables), de sorte que l'involution sur les représentations est $\sigma(v)_a = s(a)\, v_{\tau a}^T$ et $\mathrm{SRep} = \mathrm{Rep}^\sigma$ [Pin26, déf. 2.3 et 2.5]. L'application moment est la restriction de l'application moment du carquois, avec $\mu(\mathrm{SRep}) \subset \mathfrak{g}^b$ [Pin26, cor. 2.13]. L'anneau des invariants est engendré par des traces de cycles [Pin26, th. 3.9], [LP90]. L'homothétie $t \cdot v$ donne à $\mathrm{tr}(\Lambda^k C)$ le poids $k\,\ell(C)$, de sorte que chaque $\mathfrak{M}_{\mathrm{d}}$ est un cône [Pin26, §3.5.1].

Le morphisme de comparaison. Soit $\mathfrak{M}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{cl}} = \mu^{-1}(0)//G_{\mathrm{d}}$ la variété de carquois classique du même carquois. Par la propriété universelle des quotients catégoriques, il existe un morphisme $\iota : \mathfrak{M}_{\mathrm{d}} \to (\mathfrak{M}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{cl}})^{[\sigma]}$. La remarque 2.15 de [Pin26] affirme que c'est un isomorphisme, en citant [Li19, Nak25]. Les sources donnent moins. Li démontre que ι est une *immersion fermée* pour un graphe arbitraire [Li19, prop. 9.2.1], qualifie de conjectural l'isomorphisme pour ι pour tout graphe, attendu en type A_n [Li19, rem. 9.2.3] ; sa proposition 9.2.2 ne démontre un isomorphisme que pour une application élargie $\tilde{\iota}$ [Li19, prop. 9.2.2]. Nakajima ne traite que les σ-variétés de carquois lisses, à ζ générique [Nak25]. Li travaille avec des variétés encadrées (v, w) et des formes prescrites ; nous *supposons* dans tout le texte que sa proposition 9.2.1 s'applique au cadre non encadré et signé de Pinot (question 2). Nous n'utilisons que l'immersion fermée.

3 Les surfaces en δ

Théorème 3.1. *Supposons que l'immersion fermée de Li $\iota : \mathfrak{M}_\delta \hookrightarrow \mathfrak{M}_\delta^{\mathrm{cl}}$ vaille dans le cadre de Pinot, δ étant la racine imaginaire minimale du graphe affine sous-jacent. Si $\mathfrak{M}_\delta$ est une surface réduite et irréductible (comme dans toutes les lignes non triviales de [Pin26, th. 1.2]), alors ι est un isomorphisme et $[\sigma]$ agit trivialement sur $\mathfrak{M}_\delta^{\mathrm{cl}}$. En particulier $\mathfrak{M}_\delta \cong \mathbb{C}^2/\Gamma$, où Γ est le groupe de McKay du graphe affine sous-jacent.*

Démonstration. $\mathfrak{M}_\delta^{\mathrm{cl}} \cong \mathbb{C}^2/\Gamma$ est une surface irréductible [Kro89, Nak94]. Une immersion fermée d'une surface réduite et irréductible dans une surface irréductible est surjective, donc un isomorphisme sur celle-ci. Comme son image est contenue dans le lieu fixe de $[\sigma]$, ce lieu fixe est la surface entière. [démontré ici] (sous l'hypothèse). □

Corollaire 3.2. *Les lignes non triviales en δ sont de type A_{2n-2} pour $\widetilde{A}_{2n-2}$, A_{2n-1} pour $\widetilde{A}_{2n-1}$, D_{2n-2} pour $(\widetilde{D}_{2n-2}, v)$ et D_{2n-1} pour $(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$. Les deux dernières remplacent l'étiquette D_{n+1} imprimée dans [Pin26, th. 1.2] ; elles ne coïncident avec elle que pour $n = 3$ dans le premier cas, et jamais dans le second.*

Le corollaire 3.2 dépend de l'hypothèse du théorème 3.1. Les deux résultats suivants le vérifient de façon indépendante.

Proposition 3.3 (monômes pondérés)**.** *Dans les lignes $\widetilde{D}$, posons $x = \det C_3$, $y = \operatorname{tr}(C_1C_2)$, $z = \operatorname{tr}(C_1C_2C_3)$, avec $L = 2n-5$ pour $(\widetilde{D}_{2n-2}, v)$ et $L = 2n-4$ pour $(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$ [Pin26, p. 18]. Leurs poids sont $(4, 2L+2, 2L+4)$, et une relation homogène avec z^2 est de degré $4L+8$. Les seuls monômes de ce degré sont :*

- *$(\widetilde{D}_{2n-2}, v)$, $n \geq 4$: $z^2,\ xy^2,\ x^{n-1}y,\ x^{2n-3}$. La relation $z^2 + \beta xy^2 + \alpha x^{n-1}y + \gamma x^{2n-3}$ est de type D_{2n-2} si et seulement si $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq \alpha^2/4\beta$. Pour $n = 3$, les poids sont $(4,4,6)$, donc y^3 est aussi de degré 12 : la relation est $z^2 + c(x,y)$ avec c une cubique binaire, de type D_4 si et seulement si c a trois facteurs linéaires distincts.*
- *$(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$: $z^2,\ x^{n-1}z,\ xy^2,\ x^{2n-2}$. La relation $z^2 + \alpha x^{n-1}z + \beta xy^2 + \gamma x^{2n-2}$ est de type D_{2n-1} si et seulement si $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq \alpha^2/4$. Le terme $x^{n-1}y$ imprimé dans [Pin26, lemme 3.27] est de degré $4L+6$ et ne peut pas apparaître.*

Démonstration. On résout $4a + (2L+2)b + (2L+4)c = 4L+8$ en entiers positifs ou nuls, puis on complète le carré : en y pour la première ligne, en z pour la seconde. On obtient la forme normale $z^2 + xy^2 + c\,x^{m-1}$ de D_m avec $m = 2n-2$, resp. $m = 2n-1$, et $c \neq 0$ exactement sous les conditions indiquées. De façon équivalente, par la formule de Milnor–Orlik $\mu = \prod(d/w_i - 1) = L+3$ [MO70]. [démontré ici] [arithmétique vérifiée par le noyau Lean] □

Proposition 3.4 (calcul direct)**.** *Pour $n = 3, 4, 5$, nous avons tiré 80 points aléatoires de $\mu^{-1}(0) \cap \mathrm{SRep}(\overline{Q}, \delta)$ par la méthode de Gauss–Newton et déterminé toutes les relations linéaires entre les monômes de poids $\leq 4L+8$ en x, y, z. Dans chaque cas il y a exactement une relation (valeur singulière relative $\leq 2\cdot10^{-8}$, contre $\geq 0{,}1$ pour la suivante), à coefficients entiers :*

$$(\widetilde{D}_{2n-2}, v)\ :\ z^2 = -y(-x)^{n-1} - xy^2, \qquad (\widetilde{D}_{2n-1}, a)\ :\ z^2 = z(-x)^{n-1} - xy^2.$$

La première est l'équation de [Pin26, lemme 3.28]. La seconde est celle de [Pin26, lemme 3.27] où y est remplacé par z dans le premier terme : l'étape $\operatorname{tr}(C_1C_2^2C_3^3) = \operatorname{tr}(C_1C_2C_3)(-\det C_3)^{n-1}$

semble avoir été écrite avec $\mathrm{tr}(C_1C_2)$*. Dans les deux lignes, les conditions de non-dégénérescence de la proposition 3.3 sont satisfaites (*$\beta = 1$*, discriminant* $-1/4$*; pour* $n = 3$ *dans la première ligne, la cubique est* $xy(x+y)$*, à trois facteurs distincts). Pour le signe* -1 *dans* $(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$*, tous les invariants s'annulent, en accord avec [Pin26]. [vérifié numériquement]*

carquois	signe	d	équation	type	Γ	$\lvert\Gamma\rvert$
$(\widetilde{A}_{2n-2}, v\text{-}a)$	$+1$	δ	$xy = z^{2n-1}$	A_{2n-2}	$\mathbb{Z}_{2n-1}$	$2n-1$
	-1	2δ	$xy = z^{4n-2}$	A_{4n-3}	$\mathbb{Z}_{4n-2}$	$4n-2$
$(\widetilde{A}_{2n-1}, a\text{-}a)$	$(+,+)$	δ	$xy = z^{2n}$	A_{2n-1}	$\mathbb{Z}_{2n}$	$2n$
	$(+,-)$	2δ	$xy = z^{4n}$	A_{4n-1}	$\mathbb{Z}_{4n}$	$4n$
	$(-,-)$	2δ	$xy = z^{2n}$	A_{2n-1}	$\mathbb{Z}_{2n}$	$2n$
$(\widetilde{A}_{2n-1}, v\text{-}v)$		δ	$xy = z^{2n}$	A_{2n-1}	$\mathbb{Z}_{2n}$	$2n$
$(\widetilde{A}_{2n-1}, c)$		2δ	$x^{n+1} - y^2x - z^2 = 0$	D_{n+2}	BD_{4n}	$4n$
$(\widetilde{D}_{2n-2}, v)$		δ	$z^2 = -y(-x)^{n-1} - xy^2$	$\mathbf{D_{2n-2}}$	$\mathrm{BD}_{8(n-2)}$	$8n-16$
$(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$	$+1$	δ	$\mathbf{z^2 = z(-x)^{n-1} - xy^2}$	$\mathbf{D_{2n-1}}$	$\mathrm{BD}_{4(2n-3)}$	$8n-12$

Tab. 1 : Les lignes non triviales de [Pin26, th. 1.2], corrections en gras. BD_{4k} est le groupe diédral binaire d'ordre $4k$ (pour $n = 1$ dans la ligne $(\widetilde{A}_{2n-1}, c)$, $D_3 = A_3$). Les autres lignes sont des points réduits.

4 Les surfaces en 2δ

En 2δ, la variété classique est de dimension 4 et les surfaces orthogonales sont nouvelles. Comparons chaque $\Gamma_{2\delta}$ au groupe classique Γ_{cl} du même graphe :

ligne en 2δ	$\Gamma_{2\delta}$	Γ_{cl}	indice
$(\widetilde{A}_{2n-2}, v\text{-}a)$, -1	$\mathbb{Z}_{4n-2}$	$\mathbb{Z}_{2n-1}$	2
$(\widetilde{A}_{2n-1}, a\text{-}a)$, $(+,-)$	$\mathbb{Z}_{4n}$	$\mathbb{Z}_{2n}$	2
$(\widetilde{A}_{2n-1}, c)$	BD_{4n}	$\mathbb{Z}_{2n}$	2
$(\widetilde{A}_{2n-1}, a\text{-}a)$, $(-,-)$	$\mathbb{Z}_{2n}$	$\mathbb{Z}_{2n}$	1

Les deux sur-groupes d'indice 2 de $\mathbb{Z}_{2n}$ dans $SU(2)$ qui interviennent ici, $\mathbb{Z}_{4n}$ et BD_{4n}, apparaissent tous deux.

Conjecture 4.1. Chaque surface en 2δ est isomorphe à $\mathfrak{M}_\delta^{\mathrm{cl}}/\iota$ pour une involution ι de la surface classique qui provient naturellement de la construction du carquois, triviale exactement dans la ligne $(-,-)$. (L'isomorphisme abstrait avec un quotient par une involution découle de $\Gamma_{\mathrm{cl}} \subset \Gamma_{2\delta}$ dès que les anneaux d'invariants sont identifiés ; le conjectural est que l'involution et l'application quotient proviennent des données du carquois.)

Proposition 4.2. *Écrivons* $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_m = \{XY = Z^m\}$ *avec* $X = u^m$, $Y = v^m$, $Z = uv$.

(a) Le générateur de $\mathbb{Z}_{2m} \supset \mathbb{Z}_m$ *induit* $\iota_1 : (X, Y, Z) \mapsto (-X, -Y, Z)$*. Ses invariants* X^2, Y^2, Z *vérifient* $X^2Y^2 = Z^{2m}$*, la surface* A_{2m-1}*.*

(b) Pour $m = 2n$*,* $j \in \mathrm{BD}_{4n}$ *induit* $\iota_2 : (X, Y, Z) \mapsto (Y, X, -Z)$*. Ses invariants* $s = X + Y$*,* $w = Z^2$*,* $t = Z(X - Y)$ *vérifient* $t^2 = ws^2 - 4w^{n+1}$*, la surface* D_{n+2}*.*

Avec $m = 2n-1$, resp. $m = 2n$, on retrouve exactement les trois lignes d'indice 2 ci-dessus.

Démonstration. Substitution directe ; les anneaux d'invariants sont les invariants classiques de Klein de $\mathbb{Z}_{2m}$ et de BD_{4n}. [démontré ici] [vérifié numériquement] (symbolique, $m \leq 11$). □

Les générateurs de Pinot eux-mêmes s'accordent avec ce tableau. Dans la ligne $(+,-)$, les coordonnées en 2δ sont $\det C_1, \det C_2$ et $\operatorname{tr} C_3$, alors que les coordonnées classiques en δ sont $\operatorname{tr} C_1, \operatorname{tr} C_2, \operatorname{tr} C_3$. Les poids des deux premières doublent, exactement comme $X \mapsto X^2$, $Y \mapsto Y^2$ dans (a). Il reste à construire ι à partir des données du carquois. [ouvert]

5 Les entrelacs de contact

5.1 Cônes et poids

Lemme 5.1. *Dans chaque ligne du tableau 1, les poids (longueurs de chemins) des trois générateurs de Pinot sont égaux aux degrés des invariants de Klein correspondants dans $\mathbb{C}[u,v]^\Gamma$: $(m,m,2)$ pour $\mathbb{Z}_m$ et $(4,2k,2k+2)$ pour BD_{4k}. On peut donc choisir l'identification $\mathfrak{M}_\mathrm{d} \cong \mathbb{C}^2/\Gamma$ graduée, et le cercle unité du $\mathbb{C}^*$ des homothéties agit sur $\mathbb{C}^2/\Gamma$ par les scalaires.*

Démonstration. En δ pour $\widetilde{A}_{m-1}$: $\operatorname{tr} C_1, \operatorname{tr} C_2$ sont de poids m et $\operatorname{tr} C_3$ de poids 2. En 2δ, les déterminants doublent la longueur des cycles : $(4n-2, 4n-2, 2)$ et $(4n, 4n, 2)$. Dans la ligne $(\widetilde{A}_{2n-1}, c)$ les poids sont $(4, 2n, 2n+2)$, et dans les lignes $\widetilde{D}$ ce sont $(4, 2L+2, 2L+4)$ avec $k = L+1$. Les changements de variables vers les formes normales utilisés plus haut préservent la graduation. [démontré ici] □

L'entrelacs $L_Q = (\mathfrak{M}_\mathrm{d} \setminus 0)/\mathbb{R}_{>0} \cong S^3/\Gamma$ porte sa structure de contact canonique : les tangences complexes, unique à contactomorphisme près [CNPP06]. C'est le quotient de la structure standard de S^3, puisque $\Gamma \subset SU(2)$; elle est universellement tendue et remplissable au sens de Milnor. [cité]

5.2 Une structure réelle

Une forme de contact réelle requiert une forme symplectique exacte réelle. La forme ω et l'application μ de Pinot sont holomorphes ; nous utilisons donc la structure hyperkählérienne plate de $T^*\mathrm{Rep}(Q,\mathrm{d})$: $I = i$ et $J(x,y) = (-y^\dagger, x^\dagger)$, flèche par flèche.

Lemme 5.2. *Dans l'espace signé standard, $\sigma \circ J = J \circ \sigma$ et σ est unitaire. Par conséquent $\mathrm{SRep}(\overline{Q},\mathrm{d})$ est un sous-espace quaternionique. Le groupe compact $K^b = G^b \cap \prod U(\mathrm{d}_i) = \prod O(\mathrm{d}_i,\mathbb{R}) \times \prod U(\mathrm{d}_j)$ préserve I, J, K, et les deux applications moment envoient SRep dans $\mathfrak{k}^b$.*

Démonstration. $\sigma(Jv)_a = s(a)(-v^\dagger_{(\tau a)^*})^T = -s(a)\overline{v_{(\tau a)^*}} = J(\sigma v)_a$, et de même pour a^*, en utilisant $s(a^*) = s(a)$ et $\tau(a^*) = \tau(a)^*$. L'involution σ permute les coefficients des matrices, au signe et à la transposition près ; elle préserve donc la norme hermitienne. Pour $\mu_\mathbb{C}$, la dernière assertion est [Pin26, prop. 2.11] ; pour $\mu_\mathbb{R}$, le même calcul s'applique. [démontré ici] [vérifié numériquement] □

Théorème 5.3. *Il existe un homéomorphisme $\mathbb{C}^*$-équivariant $\big(\mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0)\cap\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)\cap\mathrm{SRep}\big)/K^b \cong \mathfrak{M}_{\mathrm{d}}$. En intersectant avec la sphère unité on obtient*

$$L_Q \cong \big(\mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap S(\mathrm{SRep})\big)/K^b,$$

le quotient 3-sasakien de la sphère unité de l'espace quaternionique SRep *[BGM94, BG99]. La structure lisse de L_Q provient du lemme 5.1. La réduction n'est pas nécessairement localement libre sur l'ensemble des zéros.*

Démonstration. $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)\cap\mathrm{SRep}$ est une sous-variété fermée et G^b-stable d'une représentation unitaire de $G^b = (K^b)_{\mathbb{C}}$. Le théorème de Kempf–Ness [KN79] identifie son quotient catégorique au K^b-quotient du lieu des zéros de l'application moment de K^b, qui est $\mu_{\mathbb{R}}$ par le lemme 5.2. Les deux membres sont des cônes, donc l'identification se restreint aux entrelacs. [démontré ici] (standard) □

5.3 Flot de Reeb

D'après le lemme 5.1, le flot de Reeb de la forme de contact induite par la métrique plate est le flot de Hopf $x \mapsto e^{i\theta}x$ sur S^3/Γ.

Proposition 5.4. *Le flot de Hopf sur S^3/Γ est une fibration de Seifert, avec les données suivantes. L'orbite générique est de période 2π si $-1 \notin \Gamma$, et π sinon. La fibre exceptionnelle au-dessus d'un point conique d'ordre a est de période (générique)$/a$.*

type	Γ	L_Q	orbifold de base	période générique
A_{m-1}, m impair	$\mathbb{Z}_m$	$L(m, m-1)$	$S^2(m, m)$	2π
A_{m-1}, m pair	$\mathbb{Z}_m$	$L(m, m-1)$	$S^2(m/2, m/2)$	π
D_{k+2}	BD_{4k}	variété prismatique	$S^2(2, 2, k)$	π

Tab. 2 : Données de Seifert du flot de Reeb : orbifold de base et multiplicités. Les invariants de Seifert β_i et le nombre d'Euler ne sont pas calculés ici.

Démonstration. Le stabilisateur de x est $\{\theta : e^{i\theta}x \in \Gamma x\}$. Pour x générique, seuls les scalaires $\pm 1 \in \Gamma$ contribuent. La base est $\mathbb{C}P^1/\bar{\Gamma}$, avec $\bar{\Gamma} \subset SO(3)$ cyclique d'ordre m ou $m/2$, ou diédral d'ordre $2k$. Ses points coniques sont les points de $\mathbb{C}P^1$ de stabilisateur non trivial dans $\bar{\Gamma}$. L'identité $\chi^{\mathrm{orb}} = 2/|\bar{\Gamma}|$ contrôle les données. [démontré ici] [vérifié numériquement] [arithmétique vérifiée par le noyau Lean] □

Sous la conjecture 4.1, $S^3/\Gamma_{\mathrm{cl}} \to S^3/\Gamma_{2\delta}$ est un revêtement double de variétés de contact qui commute aux flots de Reeb lorsque l'indice est 2 (et l'identité lorsqu'il est 1) : l'entrelacs en 2δ est alors un $\mathbb{Z}_2$-quotient de l'entrelacs classique.

5.4 Remplissages

La résolution minimale classique de $\mathbb{C}^2/\Gamma$ (le quotient de Kronheimer à $\zeta \neq 0$) est un remplissage symplectique fort (kählérien) de L_Q. Elle n'est pas de Stein, puisqu'elle contient les (-2)-courbes exceptionnelles. Pour les singularités ADE, elle est difféomorphe à la fibre de Milnor [Bri71], qui est un remplissage de Stein. Pour les espaces lenticulaires munis

de cette structure de contact, tous les remplissages sont classifiés par Lisca [Lis08]. La question de savoir si le quotient orthogonal de Pinot à $\zeta \neq 0$ fournit une résolution reste ouverte : seuls les facteurs GL de G^b admettent des caractères, et l'involution envoie ζ sur $-\zeta$ avant une correction de Weyl [Nak25]. [cité] [ouvert]

6 Questions à V. Pinot

Question 1. Confirmez-vous les étiquettes D_{2n-2}, D_{2n-1} et la relation $z^2 = z(-x)^{n-1} - xy^2$ du corollaire 3.2 et de la proposition 3.4 ?

Question 2. La proposition 9.2.1 de Li s'applique-t-elle à votre cadre non encadré et signé (par exemple avec $w = 0$, ou avec un sommet d'encadrement auxiliaire) ? Le théorème 3.1 n'utilise que cette immersion fermée.

Question 3. Disposez-vous d'une référence pour l'isomorphisme de la remarque 2.15 en $\zeta = 0$ au-delà du type A_n à signes alternés ?

Question 4. Les surfaces en 2δ sont-elles des quotients de la surface classique par une involution (conjecture 4.1) ? Existe-t-il un candidat naturel pour ι en termes du carquois ?

Question 5. Comptez-vous traiter le cas de votre remarque 1.3, $(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$ de signe -1 en 2δ ? Sous la conjecture 4.1, on attendrait un sur-groupe de $\mathrm{BD}_{4(2n-3)}$ d'indice au plus 2.

A Dossier de vérification

Zip joint ; également sur `https://totogt.github.io/geometry/collab/pinot-orthogonal-quivers/`. Python 3 avec `numpy`, `scipy`, `sympy` ; Lean 4 de base (sans Mathlib).

- `verify_Dtilde_relation_numeric.py` : proposition 3.4 ; la sortie enregistrée est incluse.
- `verify_ade_types.py` : nombres de Milnor des polynômes des lignes $\widetilde{D}$; défaut d'homogénéité de la relation imprimée.
- `verify_2delta_index2.py` : proposition 4.2.
- `verify_quaternionic_SRep.py` : lemme 5.2.
- `verify_seifert.py` : tableau 2 et ordres des groupes.
- `DM3Quivers_Check.lean` : degrés des poids, identité du numérateur de Milnor–Orlik $(d - w_x)(d - w_y)(d - w_z) = (L + 3)w_x w_y w_z$, ordres des groupes et identités orbifoldes. Il ne vérifie ni la remarque 2.15 ni aucun énoncé géométrique.

Références

[BG99] C. P. Boyer, K. Galicki, *3-Sasakian manifolds*, dans *Surveys in Differential Geometry*, vol. VI, International Press, Boston, 1999 ; arXiv :hep-th/9810250.

[BGM94] C. P. Boyer, K. Galicki, B. M. Mann, The geometry and topology of 3-Sasakian manifolds, *J. Reine Angew. Math.*, **455** (1994), 183–220.

[Bri71] E. Brieskorn, Singular elements of semi-simple algebraic groups, dans *Actes du Congrès international des mathématiciens* (Nice, 1970), t. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1971, 279–284.

[CNPP06] C. Caubel, A. Némethi, P. Popescu-Pampu, Milnor open books and Milnor fillable contact 3-manifolds, *Topology*, **45** (2006), 673–689.

[Gab72] P. Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen I, *Manuscripta Math.*, **6** (1972), 71–103.

[KN79] G. Kempf, L. Ness, The length of vectors in representation spaces, dans *Algebraic Geometry* (Copenhague, 1978), Lecture Notes in Math., vol. 732, Springer, Berlin, 1979, 233–243.

[Kro89] P. B. Kronheimer, The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients, *J. Differ. Geom.*, **29** (1989), 665–683.

[Li19] Y. Li, Quiver varieties and symmetric pairs, *Represent. Theory*, **23** (2019), 1–56.

[Lis08] P. Lisca, On symplectic fillings of lens spaces, *Trans. Am. Math. Soc.*, **360** (2008), 765–799.

[LP90] L. Le Bruyn, C. Procesi, Semisimple representations of quivers, *Trans. Am. Math. Soc.*, **317** (1990), 585–598.

[MO70] J. Milnor, P. Orlik, Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials, *Topology*, **9** (1970), 385–393.

[Nak94] H. Nakajima, Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac–Moody algebras, *Duke Math. J.*, **76** (1994), 365–416.

[Nak25] H. Nakajima, Instantons on ALE spaces for classical groups, involutions on quiver varieties, and quantum symmetric pairs, prépublication arXiv :2510.13007, 2025.

[Pin26] V. Pinot, Quiver varieties for affine orthogonal quivers, prépublication arXiv :2609.39434, 2026.