Variedades de quivers ortogonais afins em δ e 2δ e seus links de contato

Pablo Nogueira Grossi

G6 LLC (d/b/a PrincipiaOrthogona), Newark, NJ, EUA g6llc@proton.me ORCID 0009-0000-6496-2186

Versão 0.2 — 5 de outubro de 2026, revisada em 11 de novembro de 2026 — preparada para avaliação de V. Pinot

Resumo

Pinot calculou recentemente as variedades de quivers $\mathfrak{M}_\delta$ e $\mathfrak{M}_{2\delta}$ dos quivers ortogonais cujo grafo subjacente é um diagrama de Dynkin afim, e identificou entre elas singularidades kleinianas de superfície (PINOT, 2026). Fazemos três observações e uma construção. (i) Supondo que a imersão fechada de Li (LI, 2019, Prop. 9.2.1) valha no contexto não enquadrado e sinalizado de Pinot (não verificamos isso), sempre que $\mathfrak{M}_\delta$ é uma superfície a involução age trivialmente e $\mathfrak{M}_\delta$ é a superfície kleiniana clássica do diagrama afim subjacente. (ii) Em consequência, as duas linhas $\widetilde{D}$ do Teorema 1.2 de Pinot são de tipo D_{2n-2} e D_{2n-1}, e não D_{n+1}; para $(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$ a relação que define a superfície é $z^2 = z(-x)^{n-1} - xy^2$. Confirmamos ambas por um cálculo numérico independente do anel de invariantes. (iii) Em todas as linhas em 2δ o grupo Γ contém o grupo clássico do grafo subjacente com índice 2 (ou 1); conjecturamos que essa estrutura de quociente surge naturalmente dos dados do quiver e demonstramos o enunciado correspondente para os anéis de coordenadas. Por fim, cada superfície é um cone cujo link é uma 3-variedade de contato S^3/Γ; mostramos que o espaço das representações simétricas é quaterniônico, de modo que o link é o quociente 3-sasakiano (de Kempf–Ness) da esfera unitária, e tabelamos as fibrações de Seifert do fluxo de Reeb (de Hopf).

Como ler esta versão. Cada enunciado traz uma etiqueta: [demonstrado aqui], [citado], [verificado numericamente] (um script no pacote; evidência, não demonstração), [aritmética verificada no núcleo do Lean] (Lean 4, apenas aritmética) ou [em aberto]. **Pacote de verificação** (Python e Lean, com README): clique aqui para abrir o zip anexado (anexado a este PDF), ou baixe em https://totogt.github.io/geometry/collab/pinot-orthogonal-quivers/. Este texto foi preparado com o auxílio do Claude (Anthropic); o autor assume a responsabilidade por ele, e o texto ainda não foi verificado por V. Pinot.

1 Introdução

As variedades de quivers de Nakajima de tipo Dynkin afim recuperam os espaços ALE de Kronheimer e as singularidades kleinianas $\mathbb{C}^2/\Gamma$ (KRONHEIMER, 1989; NAKAJIMA, 1994); os rótulos ADE remontam à classificação de Gabriel dos quivers de tipo finito (GABRIEL, 1972). Pinot estuda os quocientes análogos para *quivers ortogonais* (PINOT, 2026): quivers Q com uma involução contravariante τ e um sinal s, cujas representações simétricas $\mathrm{SRep}(\overline{Q}, \mathrm{d})$ são acionadas por $G^b_{\mathrm{d}} = \prod O(\mathrm{d}_i) \times \prod GL(\mathrm{d}_j)$, e

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{d}} = \mu^{-1}(0)/\!/G^b_{\mathrm{d}}.$$

O seu Teorema 1.2 lista $\mathfrak{M}_\delta$ e $\mathfrak{M}_{2\delta}$ para dez famílias infinitas. Esta nota relê essa tabela por dois ângulos: a comparação com a variedade de quiver clássica do mesmo grafo (§§3–4) e a geometria de contato do link de cada superfície (§5).

Resultados.

- **Teorema A** (§3). Se $\mathfrak{M}_\delta$ é uma superfície, então $\mathfrak{M}_\delta \cong \mathfrak{M}_\delta^{\mathrm{cl}}$, a superfície kleiniana clássica do grafo afim subjacente, e a involução age trivialmente sobre ela. Condicional apenas à aplicabilidade da imersão fechada de Li ao contexto não enquadrado de Pinot.
- **Corolário B** (§3). As linhas $\widetilde{D}$ são de tipo D_{2n-2} e D_{2n-1}. A equação de $(\widetilde{D}_{2n-2}, v)$ em Pinot (2026) está correta; a relação de $(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$ é $z^2 = z(-x)^{n-1} - xy^2$. Confirmado numericamente para $n = 3, 4, 5$ pelo cálculo direto do anel de invariantes.
- **Conjectura C** (§4). Cada superfície em 2δ é $\mathfrak{M}_\delta^{\mathrm{cl}}/\iota$ para uma involução ι construída naturalmente a partir dos dados do quiver (o enunciado abstrato do quociente decorre quando as identificações dos anéis de invariantes estão estabelecidas); equivalentemente $\Gamma_{2\delta} \supset \Gamma_{\mathrm{cl}}$ com índice ≤ 2, e o link clássico é um recobrimento duplo do link em 2δ (linhas de índice 2; a linha $(-,-)$ tem índice 1). O enunciado para os anéis está demonstrado.
- **Teorema D** (§5). $\mathrm{SRep}(\overline{Q}, \mathrm{d})$ é um subespaço quaterniônico; o link é o quociente de Kempf–Ness / 3-sasakiano da esfera unitária; o fluxo de Reeb é o fluxo de Hopf, com os dados de Seifert da Tabela 2.

2 Contexto

Usamos a notação de Pinot (2026), com o espaço sinalizado padrão ($J_i = \mathrm{id}$ em bases convenientes), de modo que a involução sobre as representações é $\sigma(v)_a = s(a)\, v_{\tau a}^T$ e $\mathrm{SRep} = \mathrm{Rep}^\sigma$ (PINOT, 2026, Def. 2.3 e 2.5). A aplicação momento é a restrição da aplicação momento do quiver, com $\mu(\mathrm{SRep}) \subset \mathfrak{g}^b$ (PINOT, 2026, Cor. 2.13). O anel de invariantes é gerado por traços de ciclos (PINOT, 2026, Teo. 3.9; LE BRUYN; PROCESI, 1990). A homotetia $t \cdot v$ dá a $\mathrm{tr}(\Lambda^k C)$ o peso $k\,\ell(C)$, de modo que todo $\mathfrak{M}_{\mathrm{d}}$ é um cone (PINOT, 2026, §3.5.1).

A aplicação de comparação. Seja $\mathfrak{M}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{cl}} = \mu^{-1}(0)/\!/G_{\mathrm{d}}$ a variedade de quiver clássica do mesmo quiver. Pela universalidade dos quocientes categóricos existe um morfismo $\iota : \mathfrak{M}_{\mathrm{d}} \to (\mathfrak{M}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{cl}})^{[\sigma]}$. A Observação 2.15 de Pinot (2026) afirma que ele é um isomorfismo, citando Li (2019) e Nakajima (2025). As fontes dão menos que isso. Li demonstra que ι é uma *imersão fechada* para um grafo arbitrário (LI, 2019, Prop. 9.2.1), chama de conjectural o isomorfismo para ι, em qualquer grafo, e esperado no tipo A_n (LI, 2019, Obs. 9.2.3); sua Proposição 9.2.2 demonstra um isomorfismo apenas para uma aplicação ampliada $\tilde{\iota}$ (LI, 2019, Prop. 9.2.2). Nakajima trata apenas σ-variedades de quivers lisas, com ζ genérico (NAKAJIMA, 2025). Li trabalha com variedades enquadradas (v, w) e formas prescritas; *supomos* ao longo do texto que a sua Proposição 9.2.1 se aplica ao contexto não enquadrado e sinalizado de Pinot (Questão 2). Usamos apenas a imersão fechada.

3 As superfícies em δ

Teorema 3.1. *Suponha que a imersão fechada de Li $\iota : \mathfrak{M}_\delta \hookrightarrow \mathfrak{M}_\delta^{\mathrm{cl}}$ valha no contexto de Pinot, sendo δ a raiz imaginária mínima do grafo afim subjacente. Se $\mathfrak{M}_\delta$ é uma superfície reduzida e irredutível (como em todas as linhas não triviais de Pinot (2026, Teo. 1.2)), então ι é um isomorfismo e $[\sigma]$ age trivialmente sobre $\mathfrak{M}_\delta^{\mathrm{cl}}$. Em particular $\mathfrak{M}_\delta \cong \mathbb{C}^2/\Gamma$, com Γ o grupo de McKay do grafo afim subjacente.*

Demonstração. $\mathfrak{M}_\delta^{\mathrm{cl}} \cong \mathbb{C}^2/\Gamma$ é uma superfície irredutível (KRONHEIMER, 1989; NAKAJIMA, 1994). Uma imersão fechada de uma superfície reduzida e irredutível numa superfície irredutível é sobrejetora, logo um isomorfismo sobre ela. Como a sua imagem está no lugar fixo de $[\sigma]$, esse lugar fixo é tudo. [demonstrado aqui] (condicional à hipótese). □

Corolário 3.2. *As linhas não triviais em δ são de tipo A_{2n-2} para $\widetilde{A}_{2n-2}$, A_{2n-1} para $\widetilde{A}_{2n-1}$, D_{2n-2} para $(\widetilde{D}_{2n-2}, v)$ e D_{2n-1} para $(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$. As duas últimas substituem o rótulo D_{n+1} impresso em Pinot (2026, Teo. 1.2); coincidem com ele apenas para $n = 3$ no primeiro caso, e nunca no segundo.*

O Corolário 3.2 depende da hipótese do Teorema 3.1. Os dois resultados seguintes o verificam de forma independente.

Proposição 3.3 (monômios ponderados)**.** *Nas linhas $\widetilde{D}$ sejam $x = \det C_3$, $y = \operatorname{tr}(C_1C_2)$, $z = \operatorname{tr}(C_1C_2C_3)$, com $L = 2n-5$ para $(\widetilde{D}_{2n-2}, v)$ e $L = 2n-4$ para $(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$ (PINOT, 2026, p. 18). Os seus pesos são $(4, 2L+2, 2L+4)$, e uma relação homogênea com z^2 tem grau $4L+8$. Os únicos monômios desse grau são:*

- *$(\widetilde{D}_{2n-2}, v)$, $n \geq 4$: $z^2,\ xy^2,\ x^{n-1}y,\ x^{2n-3}$. A relação $z^2 + \beta xy^2 + \alpha x^{n-1}y + \gamma x^{2n-3}$ é de tipo D_{2n-2} se, e somente se, $\beta \neq 0$ e $\gamma \neq \alpha^2/4\beta$. Para $n = 3$ os pesos são $(4,4,6)$, de modo que y^3 também tem grau 12: a relação é $z^2 + c(x,y)$ com c uma cúbica binária, de tipo D_4 se, e somente se, c tem três fatores lineares distintos.*
- *$(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$: $z^2,\ x^{n-1}z,\ xy^2,\ x^{2n-2}$. A relação $z^2 + \alpha x^{n-1}z + \beta xy^2 + \gamma x^{2n-2}$ é de tipo D_{2n-1} se, e somente se, $\beta \neq 0$ e $\gamma \neq \alpha^2/4$. O termo $x^{n-1}y$ impresso em Pinot (2026, Lema 3.27) tem grau $4L+6$ e não pode ocorrer.*

Demonstração. Resolva $4a + (2L+2)b + (2L+4)c = 4L+8$ em inteiros não negativos. Em seguida complete o quadrado: em y na primeira linha, em z na segunda. Obtém-se a forma normal $z^2 + xy^2 + c\,x^{m-1}$ de D_m com $m = 2n-2$, resp. $m = 2n-1$, e $c \neq 0$ exatamente sob as condições enunciadas. Equivalentemente, pela fórmula de Milnor–Orlik $\mu = \prod(d/w_i - 1) = L+3$ (MILNOR; ORLIK, 1970). [demonstrado aqui] [aritmética verificada no núcleo do Lean] □

Proposição 3.4 (cálculo direto)**.** *Para $n = 3, 4, 5$ amostramos 80 pontos aleatórios de $\mu^{-1}(0) \cap \mathrm{SRep}(\overline{Q}, \delta)$ pelo método de Gauss–Newton e determinamos todas as relações lineares entre os monômios de peso $\leq 4L+8$ em x, y, z. Em cada caso há exatamente uma relação (valor singular relativo $\leq 2 \cdot 10^{-8}$, contra $\geq 0{,}1$ para o seguinte), com coeficientes inteiros:*

$$(\widetilde{D}_{2n-2}, v):\ z^2 = -y(-x)^{n-1} - xy^2, \qquad (\widetilde{D}_{2n-1}, a):\ z^2 = z(-x)^{n-1} - xy^2.$$

A primeira é a equação de Pinot (2026, Lema 3.28). A segunda é a do Lema 3.27 de Pinot (2026) com y substituído por z no primeiro termo: a passagem $\operatorname{tr}(C_1C_2^2C_3^3) = \operatorname{tr}(C_1C_2C_3)(-\det C_3)^{n-1}$

parece ter sido escrita com $\mathrm{tr}(C_1C_2)$*. Nas duas linhas valem as condições de não degenerescência da Proposição 3.3 (*$\beta = 1$*, discriminante* $-1/4$*; para* $n = 3$ *na primeira linha a cúbica é* $xy(x+y)$*, com três fatores distintos). Para o sinal* -1 *em* $(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$ *todos os invariantes se anulam, de acordo com Pinot (2026). [verificado numericamente]*

quiver	sinal	d	equação	tipo	Γ	$\lvert\Gamma\rvert$
$(\widetilde{A}_{2n-2}, v\text{-}a)$	$+1$	δ	$xy = z^{2n-1}$	A_{2n-2}	$\mathbb{Z}_{2n-1}$	$2n-1$
	-1	2δ	$xy = z^{4n-2}$	A_{4n-3}	$\mathbb{Z}_{4n-2}$	$4n-2$
$(\widetilde{A}_{2n-1}, a\text{-}a)$	$(+,+)$	δ	$xy = z^{2n}$	A_{2n-1}	$\mathbb{Z}_{2n}$	$2n$
	$(+,-)$	2δ	$xy = z^{4n}$	A_{4n-1}	$\mathbb{Z}_{4n}$	$4n$
	$(-,-)$	2δ	$xy = z^{2n}$	A_{2n-1}	$\mathbb{Z}_{2n}$	$2n$
$(\widetilde{A}_{2n-1}, v\text{-}v)$		δ	$xy = z^{2n}$	A_{2n-1}	$\mathbb{Z}_{2n}$	$2n$
$(\widetilde{A}_{2n-1}, c)$		2δ	$x^{n+1} - y^2x - z^2 = 0$	D_{n+2}	BD_{4n}	$4n$
$(\widetilde{D}_{2n-2}, v)$		δ	$z^2 = -y(-x)^{n-1} - xy^2$	$\mathbf{D_{2n-2}}$	$\mathrm{BD}_{8(n-2)}$	$8n-16$
$(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$	$+1$	δ	$\mathbf{z^2 = z(-x)^{n-1} - xy^2}$	$\mathbf{D_{2n-1}}$	$\mathrm{BD}_{4(2n-3)}$	$8n-12$

Tabela 1: As linhas não triviais de Pinot (2026, Teo. 1.2), com as correções em negrito. BD_{4k} é o grupo diedral binário de ordem $4k$ (para $n = 1$ na linha $(\widetilde{A}_{2n-1}, c)$, $D_3 = A_3$). As demais linhas são pontos reduzidos.

4 As superfícies em 2δ

Em 2δ a variedade clássica tem dimensão 4, e as superfícies ortogonais são novas. Comparando cada $\Gamma_{2\delta}$ com o grupo clássico Γ_{cl} do mesmo grafo:

linha em 2δ	$\Gamma_{2\delta}$	Γ_{cl}	índice
$(\widetilde{A}_{2n-2}, v\text{-}a)$, -1	$\mathbb{Z}_{4n-2}$	$\mathbb{Z}_{2n-1}$	2
$(\widetilde{A}_{2n-1}, a\text{-}a)$, $(+,-)$	$\mathbb{Z}_{4n}$	$\mathbb{Z}_{2n}$	2
$(\widetilde{A}_{2n-1}, c)$	BD_{4n}	$\mathbb{Z}_{2n}$	2
$(\widetilde{A}_{2n-1}, a\text{-}a)$, $(-,-)$	$\mathbb{Z}_{2n}$	$\mathbb{Z}_{2n}$	1

Os dois supergrupos de índice 2 de $\mathbb{Z}_{2n}$ em $SU(2)$ que aparecem aqui, $\mathbb{Z}_{4n}$ e BD_{4n}, ocorrem ambos.

Conjectura 4.1. Cada superfície em 2δ é isomorfa a $\mathfrak{M}_\delta^{\mathrm{cl}}/\iota$ para uma involução ι da superfície clássica que surge naturalmente da construção do quiver, trivial exatamente na linha $(-,-)$. (O isomorfismo abstrato com um quociente por uma involução decorre de $\Gamma_{\mathrm{cl}} \subset \Gamma_{2\delta}$ quando os anéis de invariantes estão identificados; o conjectural é que a involução e a aplicação quociente venham dos dados do quiver.)

Proposição 4.2. *Escreva* $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_m = \{XY = Z^m\}$ *com* $X = u^m$, $Y = v^m$, $Z = uv$.

(a) O gerador de $\mathbb{Z}_{2m} \supset \mathbb{Z}_m$ *induz* $\iota_1 : (X,Y,Z) \mapsto (-X,-Y,Z)$*. Os seus invariantes* X^2, Y^2, Z *satisfazem* $X^2Y^2 = Z^{2m}$*, a superfície* A_{2m-1}*.*

(b) Para $m = 2n$*,* $j \in \mathrm{BD}_{4n}$ *induz* $\iota_2 : (X,Y,Z) \mapsto (Y,X,-Z)$*. Os seus invariantes* $s = X+Y$*,* $w = Z^2$*,* $t = Z(X-Y)$ *satisfazem* $t^2 = ws^2 - 4w^{n+1}$*, a superfície* D_{n+2}*.*

Com $m = 2n-1$, resp. $m = 2n$, essas fórmulas reproduzem exatamente as três linhas de índice 2 acima.

Demonstração. Substituição direta; os anéis de invariantes são os invariantes clássicos de Klein de $\mathbb{Z}_{2m}$ e BD_{4n}. [demonstrado aqui] [verificado numericamente] (simbólico, $m \le 11$). □

Os próprios geradores de Pinot se encaixam nesse quadro. Na linha $(+,-)$ as coordenadas em 2δ são $\det C_1, \det C_2$ e $\operatorname{tr} C_3$, enquanto as coordenadas clássicas em δ são $\operatorname{tr} C_1, \operatorname{tr} C_2, \operatorname{tr} C_3$. Os pesos dos dois primeiros dobram, exatamente como $X \mapsto X^2$, $Y \mapsto Y^2$ em (a). Falta construir ι a partir dos dados do quiver. [em aberto]

5 Os links de contato

5.1 Cones e pesos

Lema 5.1. *Em todas as linhas da Tabela 1, os pesos por comprimento de caminho dos três geradores de Pinot coincidem com os graus dos invariantes de Klein correspondentes em $\mathbb{C}[u,v]^\Gamma$: $(m,m,2)$ para $\mathbb{Z}_m$ e $(4,2k,2k+2)$ para BD_{4k}. Logo a identificação $\mathfrak{M}_\mathrm{d} \cong \mathbb{C}^2/\Gamma$ pode ser escolhida graduada, e o círculo unitário do $\mathbb{C}^*$ das homotetias age sobre $\mathbb{C}^2/\Gamma$ por escalares.*

Demonstração. Em δ para $\widetilde{A}_{m-1}$: $\operatorname{tr} C_1, \operatorname{tr} C_2$ têm peso m e $\operatorname{tr} C_3$ peso 2. Em 2δ os determinantes dobram o comprimento do ciclo: $(4n-2, 4n-2, 2)$ e $(4n, 4n, 2)$. Na linha $(\widetilde{A}_{2n-1}, c)$ os pesos são $(4, 2n, 2n+2)$, e nas linhas $\widetilde{D}$ são $(4, 2L+2, 2L+4)$ com $k = L+1$. As mudanças de variáveis para as formas normais usadas acima preservam a graduação. [demonstrado aqui] □

O link $L_Q = (\mathfrak{M}_\mathrm{d} \setminus 0)/\mathbb{R}_{>0} \cong S^3/\Gamma$ tem a sua estrutura de contato canônica: as tangências complexas, única a menos de contatomorfismo (CAUBEL; NÉMETHI; POPESCU-PAMPU, 2006). Ela é o quociente da estrutura padrão de S^3, pois $\Gamma \subset SU(2)$, e é universalmente tensa (*tight*) e preenchível de Milnor. [citado]

5.2 Uma estrutura real

Uma forma de contato real exige uma forma simplética exata real. A forma ω e a aplicação μ de Pinot são holomorfas, então usamos a estrutura hiperkähler plana de $T^*\mathrm{Rep}(Q, \mathrm{d})$: $I = i$ e $J(x,y) = (-y^\dagger, x^\dagger)$, flecha por flecha.

Lema 5.2. *No espaço sinalizado padrão, $\sigma \circ J = J \circ \sigma$ e σ é unitária. Logo $\mathrm{SRep}(\overline{Q}, \mathrm{d})$ é um subespaço quaterniônico. O grupo compacto $K^b = G^b \cap \prod U(\mathrm{d}_i) = \prod O(\mathrm{d}_i, \mathbb{R}) \times \prod U(\mathrm{d}_j)$ preserva I, J, K, e as duas aplicações momento levam SRep em $\mathfrak{k}^b$.*

Demonstração. $\sigma(Jv)_a = s(a)(-v^\dagger_{(\tau a)^*})^T = -s(a)\overline{v_{(\tau a)^*}} = J(\sigma v)_a$, e analogamente para a^*, usando $s(a^*) = s(a)$ e $\tau(a^*) = \tau(a)^*$. A involução σ permuta as entradas das matrizes, a menos de sinal e transposição, logo preserva a norma hermitiana. Para $\mu_\mathbb{C}$ a última afirmação é Pinot (2026, Prop. 2.11); para $\mu_\mathbb{R}$ o mesmo cálculo se aplica. [demonstrado aqui] [verificado numericamente] □

Teorema 5.3. *Existe um homeomorfismo $\mathbb{C}^*$-equivariante $\big(\mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0)\cap\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)\cap\mathrm{SRep}\big)/K^b\cong\mathfrak{M}_{\mathrm{d}}$. Intersectando com a esfera unitária obtém-se*

$$L_Q\cong\big(\mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0)\cap\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)\cap S(\mathrm{SRep})\big)/K^b,$$

o quociente 3-sasakiano da esfera unitária do espaço quaterniônico SRep *(BOYER; GALICKI; MANN, 1994; BOYER; GALICKI, 1999). A estrutura lisa de L_Q vem do Lema 5.1. A redução não precisa ser localmente livre no conjunto de zeros.*

Demonstração. $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)\cap$SRep é uma subvariedade fechada e G^b-estável de uma representação unitária de $G^b=(K^b)_{\mathbb{C}}$. O teorema de Kempf–Ness (KEMPF; NESS, 1979) identifica o seu quociente categórico com o K^b-quociente do conjunto de zeros da aplicação momento de K^b, que é $\mu_{\mathbb{R}}$ pelo Lema 5.2. Os dois lados são cones, logo a identificação se restringe aos links. [demonstrado aqui] (padrão) □

5.3 Fluxo de Reeb

Pelo Lema 5.1, o fluxo de Reeb da forma de contato induzida pela métrica plana é o fluxo de Hopf $x\mapsto e^{i\theta}x$ sobre S^3/Γ.

Proposição 5.4. *O fluxo de Hopf sobre S^3/Γ é uma fibração de Seifert com os dados seguintes. A órbita genérica tem período 2π se $-1\notin\Gamma$ e π caso contrário. A fibra excepcional sobre um ponto cônico de ordem a tem período (genérico)$/a$.*

tipo	Γ	L_Q	orbifold de base	período genérico
A_{m-1}, m ímpar	$\mathbb{Z}_m$	$L(m,m-1)$	$S^2(m,m)$	2π
A_{m-1}, m par	$\mathbb{Z}_m$	$L(m,m-1)$	$S^2(m/2,m/2)$	π
D_{k+2}	BD_{4k}	variedade prismática	$S^2(2,2,k)$	π

Tabela 2: Dados de Seifert do fluxo de Reeb: orbifold de base e multiplicidades. Os invariantes de Seifert β_i e o número de Euler não são calculados aqui.

Demonstração. O estabilizador de x é $\{\theta : e^{i\theta}x\in\Gamma x\}$. Para x genérico só contribuem os escalares $\pm1\in\Gamma$. A base é $\mathbb{C}P^1/\bar\Gamma$, com $\bar\Gamma\subset SO(3)$ cíclico de ordem m ou $m/2$, ou diedral de ordem $2k$. Os seus pontos cônicos são os pontos de $\mathbb{C}P^1$ com estabilizador não trivial em $\bar\Gamma$. A identidade $\chi^{\mathrm{orb}}=2/|\bar\Gamma|$ confere os dados. [demonstrado aqui] [verificado numericamente] [aritmética verificada no núcleo do Lean] □

Sob a Conjectura 4.1, $S^3/\Gamma_{\mathrm{cl}}\to S^3/\Gamma_{2\delta}$ é um recobrimento duplo de variedades de contato que comuta com os fluxos de Reeb quando o índice é 2 (e a identidade quando o índice é 1): o link em 2δ é então um $\mathbb{Z}_2$-quociente do link clássico.

5.4 Preenchimentos

A resolução mínima clássica de $\mathbb{C}^2/\Gamma$ (o quociente de Kronheimer com $\zeta\neq0$) é um preenchimento simplético forte (kähleriano) de L_Q. Ela não é de Stein, pois contém as (-2)-curvas excepcionais. Para singularidades ADE ela é difeomorfa à fibra de Milnor (BRIESKORN, 1971), que é um preenchimento de Stein. Para espaços lenticulares com essa estrutura de contato, todos

os preenchimentos foram classificados por Lisca (2008). Fica em aberto se o quociente ortogonal de Pinot com $\zeta \neq 0$ dá uma resolução: apenas os fatores GL de G^b admitem caracteres, e a involução leva ζ em $-\zeta$ antes de uma correção de Weyl (NAKAJIMA, 2025). [citado] [em aberto]

6 Questões para V. Pinot

Questão 1. Confirma os rótulos D_{2n-2}, D_{2n-1} e a relação $z^2 = z(-x)^{n-1} - xy^2$ do Corolário 3.2 e da Proposição 3.4?

Questão 2. A Proposição 9.2.1 de Li se aplica ao seu contexto não enquadrado e sinalizado (por exemplo com $w = 0$, ou com um vértice de enquadramento auxiliar)? O Teorema 3.1 usa apenas essa imersão fechada.

Questão 3. Há uma fonte para o isomorfismo da Observação 2.15 em $\zeta = 0$ além do tipo A_n com sinais alternados?

Questão 4. As superfícies em 2δ surgem como quocientes da superfície clássica por uma involução (Conjectura 4.1)? Há um candidato natural para ι em termos do quiver?

Questão 5. Pretende tratar o caso da sua Observação 1.3, $(\widetilde{D}_{2n-1}, a)$ com sinal -1 em 2δ? Sob a Conjectura 4.1 seria de esperar um supergrupo de $\mathrm{BD}_{4(2n-3)}$ de índice no máximo 2.

A Pacote de verificação

Zip anexado; também em `https://totogt.github.io/geometry/collab/pinot-orthogonal-quivers/`. Python 3 com `numpy`, `scipy`, `sympy`; Lean 4 básico (sem Mathlib).

- `verify_Dtilde_relation_numeric.py`: Proposição 3.4; inclui a saída gravada.
- `verify_ade_types.py`: números de Milnor dos polinômios das linhas $\widetilde{D}$; defeito de homogeneidade da relação impressa.
- `verify_2delta_index2.py`: Proposição 4.2.
- `verify_quaternionic_SRep.py`: Lema 5.2.
- `verify_seifert.py`: Tabela 2 e as ordens dos grupos.
- `DM3Quivers_Check.lean`: graus dos pesos, a identidade do numerador de Milnor–Orlik $(d - w_x)(d - w_y)(d - w_z) = (L + 3)w_x w_y w_z$, ordens dos grupos e identidades de orbifolds. Não verifica a Observação 2.15 nem qualquer enunciado geométrico.

Referências

BOYER, C. P.; GALICKI, K. 3-Sasakian manifolds. *In*: **Surveys in Differential Geometry**. Boston: International Press, 1999. v. 6. Disponível em: `https://arxiv.org/abs/hep-th/9810250`.

BOYER, C. P.; GALICKI, K.; MANN, B. M. The geometry and topology of 3-Sasakian manifolds. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 455, p. 183–220, 1994.

BRIESKORN, E. Singular elements of semi-simple algebraic groups. *In*: CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS, 1970, Nice. **Actes** [...]. Paris: Gauthier-Villars, 1971. t. 2, p. 279–284.

CAUBEL, C.; NÉMETHI, A.; POPESCU-PAMPU, P. Milnor open books and Milnor fillable contact 3-manifolds. **Topology**, v. 45, n. 3, p. 673–689, 2006.

GABRIEL, P. Unzerlegbare Darstellungen I. **Manuscripta Mathematica**, v. 6, p. 71–103, 1972.

KEMPF, G.; NESS, L. The length of vectors in representation spaces. *In*: **Algebraic Geometry**: Copenhagen 1978. Berlin: Springer, 1979. p. 233–243. (Lecture Notes in Mathematics, v. 732).

KRONHEIMER, P. B. The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients. **Journal of Differential Geometry**, v. 29, n. 3, p. 665–683, 1989.

LE BRUYN, L.; PROCESI, C. Semisimple representations of quivers. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 317, n. 2, p. 585–598, 1990.

LI, Y. Quiver varieties and symmetric pairs. **Representation Theory**, v. 23, p. 1–56, 2019. DOI: 10.1090/ert/522.

LISCA, P. On symplectic fillings of lens spaces. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 360, n. 2, p. 765–799, 2008.

MILNOR, J.; ORLIK, P. Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials. **Topology**, v. 9, p. 385–393, 1970.

NAKAJIMA, H. Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras. **Duke Mathematical Journal**, v. 76, n. 2, p. 365–416, 1994.

NAKAJIMA, H. **Instantons on ALE spaces for classical groups, involutions on quiver varieties, and quantum symmetric pairs**. arXiv:2510.13007, 2025. Disponível em: https://arxiv.org/abs/2510.13007.

PINOT, V. **Quiver varieties for affine orthogonal quivers**. arXiv:2609.39434, 2026. Disponível em: https://arxiv.org/abs/2609.39434.